# DARSTELLUNG DER FORMELN FÜR DIE RECTIFICATION DER CURVEN...

Augustin Kregcz





# Darstellung

der

# FORMELN

für die

## Rectification der Curven,

für die

## Complanation und Cubirung der Körper,

ohne Annahme

eines andern Grundsatzes

als der Taylor'schen Formel.

---

Von

Augustin Kregčz.

---

Prag.

Druck bei M. I. Landau, Altstadt, grosser Ring, N. 933.

1827.



D e m

Wohlgeborenen Herrn

# ANTON von HOFBAUER

Hauptmann beim löblichen k. k. Infanterie - Regimente

Erzherzog Rainer.

Achtungsvoll gewidmet

v o m

V e r f a s s e r.

## §. 1.

Wenn die veränderliche Grösse x in irgend einer Funktion derselben $= fx$, in $x \pm \Delta x$ übergeht (wo $\Delta x$ willkührlich gross ist), so gibt Taylor's Formel für die geänderte Funktion $= f(x + \Delta x)$ einen Ausdruck, der seiner Form nach durch

$$fx + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \cdot\,\cdot$$

dargestellt werden kann, wo bekanntlich A, B, C u. s. w. beziehungsweise $= f'x$, $f''x$, $f'''x$ etc. nämlich den abgeleiteten Funktionen von $fx$ gleich sind.

Da es mir in diesem Versuche keineswegs um die Darstellung obigen Lehrsatzes zu thun ist, so beziehe ich mich durchaus auf den musterhaften Beweis von La Grange. Wir erhalten sonach die Gleichung

$$f(x \pm \Delta x) = fx + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \cdot\,\cdot$$

woraus sich

$$f(x \pm \Delta x) - fx = A\Delta x + B\Delta x^2 + \cdot\,\cdot$$

als Betrag der Aenderung in der Funktion ergibt.

Nehmen wir ferner den Quotienten zwischen $f(x \pm \Delta x) - fx$ und $\Delta x$ so erhalten wir

$$\frac{f(x \pm \Delta x) - fx}{\Delta x} = \frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

$$= A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \cdot\ \cdot$$

Die Form dieser letzten Gleichung lehrt uns den für die Anwendung sehr merkwürdigen Satz: dass das Verhältniss

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

wenigstens Ein Glied enthält, welches von $\Delta x$ unabhängig ist. Dass aber in der Entwickelung von

$$f(x \pm \Delta x)$$

immer ein Glied vorkommen müsse, welches die Grösse $\Delta x$ bloss einMahl als Faktor enthält, lässt sich so leicht darthun, dass ich den Beweis füglich übergehen kann, ohne ihn erst aus dem Taylor'schen Satze holen zu dürfen.

Die Anwendung des merkwürdigen Verhältnisses, welches zwischen $\Delta fx$ und $\Delta x$ obwaltet, besteht in folgendem:

Gesetzt, es wäre der Quotient

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

gegeben, und man sollte die Funktion herstellen, von welcher obiger Quotient als ein auf die bekannte Art abgeleiteter, angesehen werden dürfte?

Da sich in den meisten Fällen das Verhältniss

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

nicht als ein geschlossenes Ganze darstellen lässt, so verfällt man natürlich auf den Gedanken, ob nicht etwa einige Glieder des Verhältnisses

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

hinreichen, die urspringliche Funktion $fx$ zu bestimmen, und dieses führt mich denn auf die Beantwortung folgender Frage:

„Welche Glieder des Verhältnisses $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ sind zur Bestimmung der Stammfunktion geeignet, und warum?"

Die richtige Beantwortung dieser Frage liefert zugleich die Mittel, das aufgenommene Problem genügend zu lösen.

Wir wissen von der noch unbekannten, aus dem Verhältnisse

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

zu suchenden Funktion $fx$ wenigstens so viel gewiss, dass sie der Grösse und Form nach, von $\Delta x$ gänzlich unabhängig ist. Dieses einzige Kennzeichen berechtigt uns zu dem Schlusse, dass $fx$ aus keinem Gliede bestimmbar sey, welches in dem Verhältnisse $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ als abhängig von $\Delta x$ erscheint, so dass es in Beziehung auf die gesuchte Funktion ebeh so viel ist, als wenn alle von $\Delta x$ abhängigen Glieder im obigen Verhältnisse gar nicht vorhanden wären.

Da aber $fx$ aus $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ bestimmbar seyn muss, weil $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ aus irgend einer Funktion entstanden vorausgesetzt wird, (indem es sonst eine ungereimte Forderung wäre, $fx$ zu suchen) so muss jenes Glied, welches in dem Quotienten $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$, von $\Delta x$ unabhängig ist, allein im Stande seyn, $fx$ zu bestimmen.

Es ist daher kein Grund vorhanden, $\Delta x$ unendlich klein zu nehmen, damit etwa alle Glieder, welche die Grösse $\Delta x$ enthalten (wo $m > 1$) gegen das erste $A.\Delta x$ verschwinden, welches auch bloss eine Annäherung zur Wahrheit wäre, und um so weniger darf man $\Delta x = o$ setzen, weil für diesen Fall $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ die

Form $\frac{0}{0}$ erhält, und zwischen Nulien, als k e i n e n Grössen, offenbar auch keine Vergleichung möglich ist.

Die oben gebrauchten Schlüsse zeigen demnach genügend, wovon die Bestimmung der Funktion $fx$ aus dem Quotienten $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ abhängt, warum alle von $\Delta x$ abhängigen Glieder nicht zu beachten sind, und warum endlich die Differenzial - Rechnung, sowohl auf unendlich kleine Grössen, als auch auf Nullenverhältnisse gegründet, wahre Resultate liefern musste.

Ist man daher im Stande, das Verhältniss $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ einer noch unbekannten Funktion $fx$ zu bestimmen, (was bei räumlichen Gegenständen immer möglich ist), und zugleich jene Glieder zu erkennen, welche auf die Bestimmung von $fx$ Einfluss haben: so erhält man das gesuchte Integral, wo man noch, um dieses letztere in der gehörigen Ausdehnung zu erhalten, die Constanten zu finden hat, die sich bei der wirklichen Anwendung immer aus bekannten zusammengehörigen Werthen von $x$ und $fx$ angeben lassen.

Es scheint vielleicht ungereimt, das Verhältniss $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ einer noch unbekannten Funktion suchen zu wollen?

Bedenkt man aber, dass jedes Ding erforscht werden kann, wenn es in Verbindung mit solchen Dingen betrachtet wird, deren Eigenschaften man bereits kennt, und die mit dem zu Erforschenden nothwendig in irgend einer Beziehung stehen: so ist kein Zweifel, dass man auch obiger Forderung Genüge leisten könne.

---

## §. 2.

## Anwendung des vorgetragenen Satzes.

---

### Aufgabe.

**Eine allgemeine Formel für die Bogenlänge einer ebenen Curve anzugeben.**

### Auflösung.

Es sey die Curve AMN, deren Beschaffenheit durch irgend eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ in Beziehung auf die Axen AX, AY bekannt ist.

Man nehme A als Anfangspunkt der Coordinaten, setze $AP = x$, $MP = y = fx$, und die Länge des entsprechenden Bogens $AM = Fx$.

Offenbar ist, wenn $AP = x$ um das Stück $PP' = \Delta x$ wächst, $M'P' = f(x + \Delta x)$, der Bogen $AM' = F(x + \Delta x)$, und folglich der Bogen $MM' = AM' - AM = F(x + \Delta x) - Fx = \Delta Fx$.

Da hier $Fx$ gesucht wird, so muss man vorerst den Quotienten $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ ausmitteln, und dazu dient folgende Betrachtung:

Was ist der Bogen $MM' = \Delta Fx$?

Offenbar nichts anderes, als die Entfernung zweier Punkte $M$, $M'$ in der Ebene, welche aber durch das Gesetz $y = fx$ bedingt wird.

Solcher Entfernungen zwischen $M$, $M'$ kann es natürlich unendlich viele geben, welche aber in einer gewissen Beziehung zu einander stehen müssen, welche letztere von dem Bildungsgesetze der Curve abhängen wird.

Man vergleiche sonach $\Delta Fx$ mit derjenigen unter allen möglichen Entfernungen zwischen $M$, $M'$,

welche man wirklich kennt. Dass diese letztere keine andere als die Sehne $MM'$ ist, folgt von selbst.

Die allgemeinste Beziehung zwischen dem Bogen $\Delta Fx$ und seiner Sehne, ist offenbar:

$$\Delta Fx = \text{Sehne } \Delta Fx \pm m \text{ Sehne } \Delta Fx$$

wo $m$ den numerischen Coëffizienten bedeutet, der obiger Gleichung genügt.

Da aber

$$\text{Sehne } \Delta Fx = \sqrt{(MO^2 + M'O^2)} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

und nach Taylor's Formel

$$\Delta y = \Delta f x = f(x + \Delta x) - fx$$

$$= f'x . \Delta x + f''x . \frac{\Delta x^2}{1.2} + f'''x . \frac{\Delta x^3}{1.2.3}$$

$$+ \ldots$$

$$= \Delta x\left(f'x + f''x . \frac{\Delta x}{1.2} + f'''x . \frac{\Delta x^2}{1.2.3} + \ldots\right)$$

sonach:

$$\Delta y^2 = \Delta x^2\left((f'x)^2 + f'x . f''x . \Delta x + w f^n x . \Delta x^{n-1}\right)$$

(wo $w f^n x . \Delta x^{n-1}$ jedes der noch folgenden Glieder vorstellt), so erhält man für die Sehne $\Delta Fx$ folgenden Ausdruck:

Sehne $\Delta F x =$

$$\Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + f'x \cdot f''x \cdot \Delta x + \; . \; . \; . \right)}$$

Zieht man die Wurzel wirklich, und multiplizirt mit $\Delta x$, so ist das Glied $\Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$ das einzige, welches die Grösse $\Delta x$ bloss einmal als Faktor enthält.

Man kann sonach die Gleichung ansetzen:

$$\text{Sehne } \Delta F x = \Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} + \varphi(\Delta x)$$

wo $\varphi(\Delta x)$ eine gewisse Funktion von $\Delta x$ bedeutet, von der man weiter nichts weis, als dass sie die Grösse $\Delta x$ in keinem Gliede als erste Potenz enthält.

Wenden wir diese Resultate auf die Beziehung an, welche wir zwischen dem Bogen $\Delta F x$ und seiner Sehne durch die Gleichung

$$\Delta F x = \text{Sehne } \Delta F x \pm m \text{ Sehne } \Delta F x$$

ausgesprochen haben, so ergibt sich

$$\Delta F x =$$

$$\Delta x \sqrt{1 + (f x)^2} + \varphi(\Delta x)$$
$$+ m \Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} + m \varphi(\Delta x)$$

und sonach der gesuchte Quotient

$$\frac{\Delta F x}{\Delta x} =$$

$$\sqrt{1 + (f'x)^2} + \frac{\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$+ \; m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} + \frac{m\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$$

Da oben bewiesen wurde, dass in der Funktion $\varphi(\Delta x)$ kein Glied vorkömmt, welches die Grösse $\Delta x$ nur ein Mahl als Faktor enthielte, so ist das Glied $\frac{\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$ also auch $\frac{m \,.\, \varphi(\Delta x)}{\Delta x}$ aus Gliedern zusammen gesetzt, welche sämmtlich die Grösse $\Delta x$ enthalten, welche sonach auf die Bestimmung von Fx keinen Einfluss haben.

Wir hätten also bloss die Glieder

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)\right)^2}\,, \quad m\sqrt{\left(1 + (f'x)\right)^2}$$

zu betrachten, durch deren Integration man Fx bestimmen könnte.

Ich behaupte aber, dass der Coëffizient m von $\Delta x$ abhängig ist, und dass man folglich auf das Glied

$$m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$$

bei der Bestimmung von $Fx$ nicht zu sehen habe.

Denn, wäre $m$ von $\Delta x$ unabhängig, so hätte man die Gleichungen

$$\text{Bogen}\,(\Delta x) = \text{Sehne}\,(\Delta x) \pm m\ \text{Sehne}\,(\Delta x)$$

$$\text{Bogen}\,(\Delta x') = \text{Sehne}\,(\Delta x') \pm m\ \text{Sehne}\,(\Delta x')$$

u. s. w.

wo $m$ stets denselben Werth haben müsste.

Diese Voraussetzung gibt die Proportion:

$$\text{Bogen}\,(\Delta x) : \text{Bogen}\,(\Delta x') = \text{Sehne}\,(\Delta x) : \text{Sehne}\,(\Delta x'),$$

weil die Faktoren $1 \pm m$, $1 \pm m$ gleich sind, wenn $m$ von $\Delta x$ unabhängig ist.

Obgleich die Ungereimtheit dieser Proportion auffallend ist, so kann man sie leicht darthun.

Denn man setze, es sey

$$\text{Bogen}\,(\Delta x) : \text{Bogen}\,(\Delta x') = \text{Sehne}\,(\Delta x) : \text{Sehne}\,(\Delta x')$$

eine Proportion, d. h.

$$\text{Bogen}\ MM' : \text{Bogen}\ MN = \text{Sehne}\ MM' : \text{Sehne}\ MN$$

(wo $\Delta x'$ durch $PP''$ vorgestellt ist.)

Man hätte also auch:

$$\text{Bogen } MM' : (\text{Bogen } MN - \text{Bogen } MM')$$
$$= \text{Sehne } MM' : (\text{Sehne } MN - \text{Sehne } MM')$$

d. h.

$$\text{Bogen } MM' : \text{Bogen } M'N$$
$$= \text{Sehne } MM' : NV$$

wenn $NV = \text{Sehne } MN - \text{Sehne } MM'$ abgeschnitten wird.

Da aber die Bogen ihren Sehnen proportional seyn sollen, so ist:

$$\text{Bogen } MM' : \text{Bogen } M'N$$
$$= \text{Sehne } MM' : \text{Sehne } M'N$$

Diese Proportion mit der vorigen verbunden, gibt

$$\text{Sehne } M'N = NV$$

also wegen $MV = MM'$

$$MV + VN = MM' + M'N$$

eine offenbare Unwahrheit, welche aus der Voraussetzung hervorgegangen ist, dass $m$ von $\Delta x$ nicht abhängt.

Nachdem wir also wissen, dass der Coëffizient $m$, folglich auch das Glied

$$m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$$

von $\Delta x$ abhängt, so folgt, dass die Funktion $Fx$, als Ausdruck für die Bogenlänge, bloss aus dem Gliede

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$$

gefunden werden könne.

Wir erhalten daher die bekannte Gleichung

$$Fx = \int\sqrt{1 + (f'x)^2} + \text{Const.}$$

zur Rectification ebener Curven, welche hier ohne Annahme eines Grundsatzes u. s. w. erwiesen, vorliegt.

Es sey z. B. die Curve eine gemeine Radlinie, der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel der Curve, und die Axe derselben die Abscissen-Linie.

Für dieses Coordinaten-System hat man die Gleichung

$$y = fx =$$

$$\sqrt{(2rx - x^2)} + r.\,\text{arc sinv.}\,\frac{x}{r}$$

wo $r$ den Halbmesser des Erzeugungs-Kreises bedeutet.

Man findet leicht

$$f'x = \sqrt{(2rx^{-1} - 1)}\ , \quad \text{also}$$

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} = \sqrt{2rx^{-1}}\ , \quad \text{woraus}$$

$$Fx = \sqrt{2r}\,.\int x^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2rx} + C$$

folgt, wo aber $C = 0$, weil $Fx$ mit $x$ zugleich verschwindet.

Setzt man $x = 2r$, und nimmt das Resultat doppelt, so ergibt sich die Länge der ganzen Cycloide

$$= 8r.$$

Dieses merkwürdige Resultat führt mich auf ein noch merkwürdigeres Verhältniss zwischen dem Umfange einer Ellypse und dem einer Cycloide, wenn die Abmessungen dieser Curven ein bestimmtes Verhältniss beobachten.

Ich behalte mir es vor, dieses Verhältniss zu seiner Zeit darzuthun.

---

§. 3.

## Aufgabe.

**Die Bogenlänge einer Curve von doppelter Krümmung zu bestimmen.**

## Auflösung.

Es seyen x, $fx$, $\varphi x$ die Coordinaten irgend eines Punktes der gegebenen Curve, in Beziehung auf die coordinirten Ebenen, und $\psi x$ der Ausdruck für die Länge des Bogens, der dem Punkte

$$x, \; fx, \; \varphi x$$

(von irgend einem Punkte gerechnet) entspricht. Man hat sonach für den Punkt, dessen Coordinaten

$$x + \Delta x, \quad f(x + \Delta x), \quad \varphi(x + \Delta x)$$

sind, den ähnlichen Ausdruck

$$\psi(x + \Delta x)$$

als Bogenlänge, und

$$\psi(x + \Delta x) - \psi x = \Delta \psi x$$

= dem Bogen der Curve, welcher zwischen den betrachteten Punkten liegt.

Dieser Bogen ist nun wieder nichts anderes, als die Entfernung zweier Punkte im Raume. deren es un-

endlich viele gibt, und von welchen man wenigstens Eine kennt, nämlich die gerade Linie, welche die zwei Punkte verbindet.

Bekanntlich ist aber die Entfernung zweier Punkte im Raume, deren Coordinaten

$$x, \quad y, \quad z, \quad x', \quad y', \quad z',$$

sind

$$= \sqrt{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)}$$

daher im gegenwärtigen Falle:

$$\text{Sehne } \Delta\psi x =$$

$$\sqrt{\Delta x^2 + (\Delta f x)^2 + (\Delta \varphi x)^2}$$

und da zwischen dem Bogen $\Delta\psi x$ und seiner Sehne wieder ein gewisses Verhältniss besteht, so sey:

$$\text{Bogen } \Delta\psi x = \text{Sehne } \Delta\psi x$$
$$\pm \text{ m Sehne } \Delta\psi x$$

Entwickelt man den Ausdruck für die Sehne, so ist, weil

$$(\Delta fx)^2 = \left(f'x.\Delta x + f''x.\frac{\Delta x^2}{1.2} + f'''x.\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + ..\right)^2$$

$$= \Delta x^2\left((f'x)^2 + f'x.f''x.\Delta x + ...\right)$$

und eben so

$$(\Delta \varphi x)^2 = \Delta x^2\left((\varphi'x)^2 + \varphi'x.\varphi''x.\Delta x + ..\right)$$

Sehne $\Delta \psi x =$

$$\Delta x\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right) + B}$$

wo B die Summe der folgenden mit $\Delta x$ behafteten Glieder vorstellt.

Wird die Wurzel ausgezogen, so erhält man, als einziges Glied, worin kein $\Delta x$ erscheint, den Ausdruck

$$\sqrt{1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2}$$

Es besteht also die Gleichung

$$\Delta\psi x =$$

$$\Delta x\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + \Delta x . B' + m\Delta x\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + m\Delta x B'$$

woraus sich der Quotient

$$\frac{\Delta\psi x}{\Delta x} =$$

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + B' + m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + mB'$$

ergibt.

Da die Grösse B′ den Faktor $\Delta x$ enthält, so wäre die Funktion

$$\psi x$$

bloss aus den Gliedern

$$\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}, \quad m\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}$$

zu bestimmen.

Weil aber rücksichtlich des Coëffizienten m dieselben Schlüsse gelten müssen, wie bei ebenen Curven, weil die zwei Punkte, deren Coordinaten

$$x, \quad fx, \quad \varphi x, \quad x+\Delta x, \quad f(x+\Delta x), \quad \varphi(x+\Delta x)$$

sind, mit jenem Punkte, von dem aus die Länge der Curve gerechnet wird, als drei Punkte in einer Ebene liegen: so ist begreiflich, dass $\psi x$ bloss aus dem Gliede

$$\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}$$

bestimmbar sey, d. h. es ist

$$\psi x = \int\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}$$

---

## §. 4.

### Aufgabe.

Eine Formel für die Quadratur ebener Curven anzugeben?

### Auflösung.

Es sey, wie früher, $AP = x$, $MP = fx$, der Inhalt des Stückes APM eine gewisse Funktion von x

$$= \varphi x$$

Nimmt $AP = x$ um $PP' = \Delta x$ zu, so ist eben so

$$APM' = \varphi(x + \Delta x), \text{ daher}$$

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi x = \Delta \varphi x$$

= dem gemischtlinigen Trapeze PP'MM'.

Dieses letztere zerfällt in das Rechteck PP'MO, und in das Curven-Dreieck MM'O, dessen Inhalt, als von $\Delta x$ abhängig, keine andere Form als

$$m.\Delta x \cdot \Delta fx \quad \text{oder} \quad m.\Delta x^2$$

haben kann, wo m ein Zahlen-Coëffizient ist.

Wir erhalten daher:

$$\Delta\varphi x = fx.\Delta x \pm m\Delta x^2$$

wo sich das doppelte Zeichen $\pm$ auf hohle und erhabene Curven bezieht.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} = fx \pm m\Delta x$$

also

$$\varphi x = \int(fx) + C.$$

Wäre z. B. das zu berechnende Raumding ein Dreieck, also $fx$ von der Form

$$\alpha + \beta x$$

so lässt sich die Aufgabe auf folgende Art lösen.

Man nehme ein rechtwinkliges Dreieck (weil sich jedes andere in zwei solche zerlegen lässt), setze den Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel eines der Spitzen-Winkel, wodurch also $\alpha = 0$ wird, nehme eine Cathete zur Abscissen-Linie, bezeichne des Dreiecks Grundlinie und Höhe mit $b$, $h$, so ist, weil für diesen Fall

$$\varphi x = \int \alpha x = \frac{\alpha x^2}{2}$$

und $\alpha = \operatorname{tg} a = \frac{h}{b}$ ist

$$\varphi x = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{h}{b}$$

welches zwischen den Grenzen $x = o$ bis $x = b$ genommen, für die Fläche des ganzen Dreiecks den bekannten Ausdruck gibt:

$$\Delta(b, h) = \frac{bh}{2}$$

Es sey ferner die Curve eine Radlinie, deren Gleichung:

$$y = fx = \sqrt{(2rx - x^2)} + r. \text{ arc. sinv. } \frac{x}{r}$$

in Beziehung auf das oben angenommene Coordinaten-System ist.

Daraus folgt:

$$\varphi x = \int (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + r. \int \text{arc. sinv. } \frac{x}{r} + C.$$

Integrirt man beide Glieder, und nimmt das so erhaltene Resultat doppelt, so erhält man, nach allen

Abkürzungen, für die Fläche eines Abschnittes, dessen Höhe $= x$ ist den Ausdruck:

$$\varphi x = (r + x)\sqrt{(2rx - x^2)} + 2rx.\ \text{arc. sinv.}\ \frac{x}{r}$$

$$- 2r^2 .\ \text{arc. sin.}\ \sqrt{\frac{x}{2r}} + \text{Const.}$$

wo aber Const. $= 0$ ist.

Setzt man $x = 2r$, so ergibt sich für die Fläche der ganzen Curve der merkwürdige Ausdruck:

$$\text{Fläche} = 3\pi r^2$$

Diese Curve hat bekanntlich sehr viele merkwürdige Eigenschaften, von welchen ich aber folgende anzuführen, nicht unterlassen kann. Gesetzt, es wäre die Aufgabe aufzulösen:

„Eine gegebene Cycloidal - Fläche in zwei gleiche Theile zu theilen, so zwar dass die Halbirungslinie zur Grundlinie parallel läuft."

Es sey der Halbmesser des Erzeugungskreises der gegebenen Cycloide, der Einfachheit wegen $= 1$, also ihre Fläche $= 3\pi$.

Nach der Bedingung der Aufgabe wäre also folgende Gleichung aufzulösen:

$$(1 + x)\sqrt{(2x - x^2)} + 2x. \text{arc. sinv. } x$$

$$- 2. \text{arc. sin. } \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Obschon diese Gleichung ziemlich verwickelt ist, so hat sie doch für x, als die Entfernung des gesuchten Halbirungspunktes vom Scheitel, einen rationalen Werth, und ich überlasse dem Leser das Vergnügen, denselben zu finden.

---

## §. 5.

### Aufgabe.

Eine Gleichung für den Kubikinhalt aller Körper anzugeben.

### Auflösung.

Man beziehe den Körper auf die drei coordinirten Ebenen, und lege durch irgend einen Punkt, dessen Coordinaten

$$x, \; fx, \; \varphi x$$

sind, eine Ebene parallel zur Ebene yz, also senkrecht zur Ebene xy.

Dadurch wird ein gewisses Stück des Körpers abgeschnitten, welches zwischen dem Durchschnitte der gedachten Ebene mit dem Körper, und einem beliebigen Orte, von dem aus der Kubikinhalt zu nehmen ist, enthalten eine gewisse Funktion von x seyn wird.

Es sey diese Funktion $= Fx$, sonach zu dem Punkte

$$x+\Delta x, \; f(x+\Delta x), \; \varphi(x+\Delta x)$$

zwischen ähnlichen Grenzen genommen

$$F(x+\Delta x), \text{ und folglich}$$

$$F(x+\Delta x) - Fx = \Delta Fx = \text{dem}$$

Inhalte des Körpers, der zwischen den Durchschnitten der Ebenen mit dem Körper, und der Oberfläche desselben enthalten ist.

Wird der Durchschnitt, dessen Abscisse x ist, auf den Andern, dem die Abscisse $x + \Delta x$ ent-

spricht, oder umgekehrt, projicirt, so erhält man einen cylinderartigen Körper, dessen Inhalt durch

$$F.\Delta x$$

vorgestellt werden kann, wo F die Fläche des projicirten Durchschnittes bedeutet.

Sollte der Ausdruck $F.\Delta x$ vielleicht willkührlich scheinen, weil der Körper doch kein eigentlicher Cylinder ist, so gebe man dem Körper den Werth

$$F.\Delta x + m\Delta x^3$$

je nachdem $F.\Delta x$ kleiner oder grösser als ein wirklicher Cylinder von denselben Abmessungen ist.

Ergänzt man diesen Kubikinhalt noch durch die Körperstücke, welche sich von dem cylinderförmigen Körper angefangen, bis an die Oberfläche des Körpers erstrecken, und deren Summe, weil sie von $\Delta x$ abhängt, keine andere Form, als

$$n.\Delta x^3;\quad n'.(\Delta fx)^3,\quad n''(\Delta\varphi x)^3$$

haben kann, so erhält man

$$\Delta Fx = F.\Delta x \pm m\Delta x^3 + n\Delta x^3,\quad \text{also}$$

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = F \pm m\Delta x^2 + n\Delta x^2$$

woraus

$$Fx = \int(F) + C \quad \text{folgt.}$$

Da aber F nicht gegeben ist, sondern aus der Relazion zwischen $x$, $fx$, $\varphi x$ erst bestimmt werden muss: so ist ersichtlich, dass die Bestimmung von $Fx$ allgemein eine doppelte Integration erfordert. Denn ist die Gleichung des Durchschnittes in seiner Ebene zwischen senkrechten Coordinaten

$$y = \psi x,$$

so ist die Fläche desselben

$$= \int\psi x \quad (\S.\ 4.)$$

folglich

$$Fx = \int(\int\psi x) + C.$$

Da der Körper, als Funktion von $x$, $fx$, $\varphi x$ darzustellen ist, so muss natürlich

$$\int\psi x$$

durch dieselben Grössen ausgedrückt werden, um das Integral

$$\int\int\psi x = Fx$$

in gehöriger Form zu erhalten.

Als Anwendung wollen wir den Kubikinhalt einer Pyramide suchen.

Bedeutet B die Grundfläche, h die Höhe derselben, so ist, wenn man den coordinirten Ebenen, eine zu diesem Zwecke passende Lage gibt, den Anfangspunkt der Coordinaten in der Spitze angenommen,

$$F : B = x^2 : h^2$$

wo F die Fläche des Durchschnittes, und x dessen senkrechte Entfernung von der Spitze bezeichnet.

Man hat also:

$$\int \psi x = F = \frac{Bx^2}{h^2}, \quad \text{und}$$

$$Fx = \int\int \psi x = \int \frac{Bx^2}{h^2}$$

$$= \frac{Bx}{3h^2} + C$$

wo aber $C = o$ ist, weil Fx mit x zugleich verschwindet.

Dieses Integral zwischen den Grenzen $x = o$

bis $x = h$ genommen, gibt für den Inhalt der ganzen Pyramide den bekannten Ausdruck

$$\text{Pyramide}\ (B,\ h) = \tfrac{1}{3}.\ B.\ h.$$

Entsteht der Körper durch Rotation, so bedeutet $F$ die Fläche eines Kreises

$$= \pi.\ (fx)^2$$

wo $fx$ die Natur der Erzeugungs-Curve angibt; daher ist für alle durch Rotation entstandene Körper:

$$Fx = \pi.\ \int\Big((fx)^2\Big) + C.$$

Gesetzt, es hätte $fx$ die Form

$$\sqrt{(2rx - x^2)}$$

also der Körper wäre eine Kugel, so folgt:

$$Fx = \pi\int(2rx - x^2)$$

$$= \pi\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

sonach für $x = 2r$, der Inhalt der ganzen Kugel

$$= \tfrac{4}{3}\ \pi.\ r^3$$

u. s. w.

§. 6.

## Aufgabe.

**Die krumme Oberfläche eines Körpers zu bestimmen.**

## Auflösung.

Man durchschneide den Körper in einem beliebigen Punkte

$$x, \; fx, \; \varphi x$$

mit einer Ebene, senkrecht zur Ebene $xy$, und setze die krumme Oberfläche des dadurch abgeschnittenen Körpers $= Fx$.

Macht man auf dieselbe Art einen Schnitt im Punkte

$$x + \Delta x, \; f(x + \Delta x), \; \varphi(x + \Delta x)$$

so bedeutet $F(x + \Delta x)$ die Oberfläche dieses zweiten körperlichen Abschnittes, daher ist

$$F(x + \Delta x) - Fx = \Delta Fx =$$

der Oberfläche des Streifens, welcher zwischen den zwei Durchschnitten enthalten ist.

Der Inhalt dieses Streifens hängt offenbar von der Länge der Grenzlinien der Durchschnitte, und von der Entfernung dieser letztern, auf der krummen Oberfläche gerechnet, ab, und muss sich daher durch diese Stücke ausdrücken lassen.

Der Inhalt des gedachten Streifens muss also durch

$$\text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x) \cdot \partial \pm m \Delta x^2$$

vorgestellt werden können, wo der erste Faktor die Länge der Grenzlinie bedeutet, welche dem Punkte

$$x, \ fx, \ \varphi x$$

entspricht, und $\partial$ die Entfernung der zwei Grenzlinien (auf der Oberfläche gerechnet) vorstellt.

Begreiflich gibt es sehr viele Entfernungen der zwei Grenzlinien, welche alle zu diesem Zwecke dienlich seyn müssen, wo ich aber absichtlich jene wähle, welche mit den betrachteten Stücken in unmittelbarer Verbindung steht.

Wir hätten also:

$$\Delta Fx = \text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x)\ \partial \pm m\Delta x^2$$

und weil $\partial$ auch die Länge des Bogens ist, der zwischen den Punkten

$$x, fx, \varphi x \text{ und } x + \Delta x, f(x + \Delta x)\ \ \varphi(x + \Delta x)$$

enthalten ist, so erhält man, wenn für diesen Fall der Ausdruck aus §. 3 benützt wird, mit Hinweglassung aller Glieder, worin die Grösse $\Delta x$ vorkömmt,

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} =$$

$$\text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x) \cdot \sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi' x)^2\right)}$$

also endlich:

$$Fx =$$

$$\int\left(\text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x)\ \sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi' x)^2\right)}\right)$$

Die Länge der Grenzlinie, als einer ebenen Curve, ergibt sich aus §. 2

$$= \int \sqrt{\left(1 + (\psi' x)^2\right)}$$

wo $\psi x$ die Gleichung des Durchschnittes in seiner Ebene vorstellt, daher ist:

$$Fx =$$

$$\int \left( \int \sqrt{\left(1+(\psi' x)^2\right)} \cdot \sqrt{\left(1 + (f' x)^2 + (\varphi' x)^2\right)} \right)$$

$$+ \; C$$

wo sich das Integral - Zeichen innerhalb der Klammer bloss auf den Faktor bezieht, vor dem es steht.

Entsteht der Körper durch Umdrehung, so ist

$$\int \sqrt{\left(1 + (\psi' x)^2\right)}$$

$=$ dem Umfange eines Kreises

$$= 2\pi \, . \, fx$$

wo $fx$ die Gleichung der Erzeugungs - Curve bedeutet, und da in diesem Falle

$$\varphi x = 0$$

ist, so erhält man für solche Körper

$$Fx = 2\pi \int \left( fx \sqrt{\left( 1 + (f' x)^2\right)} \right) + C.$$

Gesetzt der Körper sey eine Kugel, also

$$fx = \sqrt{(2rx - x^2)}$$

sonach

$$f'x = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} = \frac{r}{fx},$$

also

$$Fx = 2\pi fr = 2\pi rx$$

folglich für $x = 2r$, die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$.

---

Zum Schlusse will ich diese Methode auf die gleichförmig beschleunigte Bewegung anwenden.

Es wirke also eine unveränderliche Kraft auf einen Körper beständig fort, und der Körper habe nach Verlauf der Zeit $t$ den Raum $s$ zurückgelegt, der, als Funktion der Zeit, durch $ft$ bezeichnet werde.

Nimmt t um $\Delta t$ zu, so ist der zugehörige Raum

$$= f(t + \Delta t), \text{ also}$$

$$f(t + \Delta t) - ft = \Delta ft$$

= dem Raume, welcher während der Zeit $\Delta t$ zurückgelegt wird.

Diesen Raum finde ich auf folgende Art:

Zu Ende der Zeit t hatte der Körper eine gewisse Geschwindigkeit

$$= \varphi t$$

d. h. das Vermögen, auch ohne fernere Einwirkung der beschleunigenden Kraft, sich gleichförmig mit der so erlangten Fähigkeit zu bewegen.

Kraft dieser letzteren hätte also der Körper während der Zeit $\Delta t$ den Raum $\varphi t \cdot \Delta t$ zurückgelegt, vorausgesetzt, dass er während derselben nicht beschleuniget worden wäre.

Obgleich nun die beschleunigende Kraft während der Zeit $\Delta t$ zu wirken nicht aufgehört hat,

so hat sie desswegen weiter nichts verursacht, als dass der während der Zeit $\Delta t$ beschriebene Raum grösser ist, als $\varphi t \,.\, \Delta t$, und zwar um ein Stück, welches bloss von der Beschleunigung herrührt.

Diese Zusammensetzung muss desswegen erlaubt seyn, weil der Körper die einmal erhaltene Fähigkeit $\varphi t$ durch die Beschleunigung nicht verlieren konnte.

Der Raum, welcher von der Beschleunigung während der Zeit $\Delta t$ herrührt, muss als Funktion von $\Delta t$ die Form

$$\psi t \,.\, \Delta t^m.$$

haben, wo natürlich $m > 1$ seyn muss, weil die Räume bei der beschleunigten Bewegung, nach dem Begriffe der Beschleunigung, in einem gröseren Verhältnisse, als dem der Zeiten, zunehmen müssen.

Wir haben also die Gleichung:

$$\Delta ft = \varphi t \,.\, \Delta t + \psi t \,.\, \Delta t^m$$

woraus

$$\frac{\Delta ft}{\Delta t} = \varphi t + \psi t \,.\, \Delta t^{m-1}$$

und endlich

$$ft = \int \varphi t + C$$

folgt, weil das Glied

$$\varphi t \,.\, \Delta t^{m-1},$$

wegen $m > 1$ die Grösse $\Delta t$ enthält, sonach auf das gesuchte Integral keinen Einfluss hat.

Weil nun $\varphi t$ die Geschwindigkeit des Körpers zu Ende der Zeit $t$ bedeutet, also $= ct$ ist, so hat man

$$ft = s = \int ct = \frac{ct^2}{2}$$

Man kann diesen Satz auf folgende Art kürzer erweisen.

Denn man kann setzen

$$\Delta ft = \varphi t \,.\, \Delta t + m\varphi t \,.\, \Delta t$$

wo das zweite Glied die Ergänzung, wegen der Beschleunigung bedeutet.

Man erhält

$$\frac{\Delta ft}{\Delta t} = \varphi t + m\varphi t$$

Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass m von $\Delta t$ abhängt, und folglich das Glied $m \cdot \varphi t$ nicht zu betrachten kömmt.

Denn wäre m von $\Delta t$ unabhängig, so hätte man die analogen Gleichungen:

$$\Delta ft = \varphi t \,.\, \Delta t + m\varphi t \,.\, \Delta t$$

$$\Delta' ft = \varphi t \,.\, \Delta t' + m\varphi t \,.\, \Delta t'$$

also auch die Proportion:

$$\Delta ft : \Delta' ft = \Delta t : \Delta t'$$

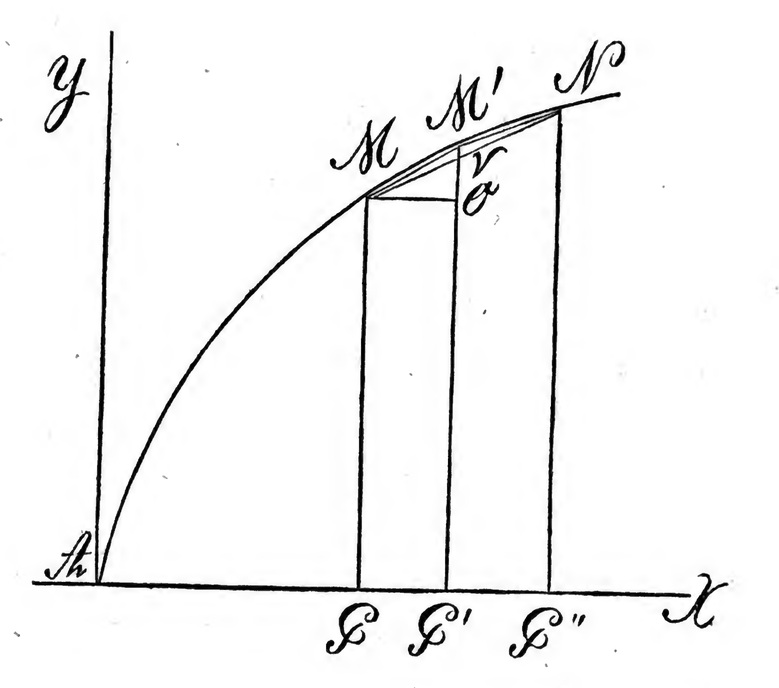
eine Eigenschaft der gleichförmigen Bewegung, was sonach der Voraussetzung widerspricht.

Der Coëffizient m ist also von $\Delta t$ abhängig, d. h. man hat, wie früher:

$$ft = \int \varphi t.$$

Ich bemerke noch, dass ich diese Methode bei jeder, wie immer gearteten Bewegung der festen so-

wohl als der flüssigen Körper mit demselben Erfolge gebraucht habe, und bin gesonnen, die erhaltenen Resultate, nebst einer kurzen, n e u e n Anleitung zur Differenzial - Rechnung baldigst herauszugeben.


y
M
M'
N
v
o
A
P
P'
P''
X

